

DIEGO RYBSKI<sup>1</sup>, JAN F. EICHNER<sup>1</sup>, EVA KOSCIELNY-BUNDE<sup>1,3</sup>, SHLOMO HAVLIN<sup>2</sup>, HANS-JOACHIM SCHELLNHUBER<sup>1</sup>, ARMIN BUNDE<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Institut für Theoretische Physik III, Justus-Liebig-Universität, D-35392 Giessen, Germany  
<sup>2</sup>Department of Physics and Gonda-Goldschmid-Center for Medical Diagnosis, Bar-Ilan University, Ramat-Gan 52900, Israel  
<sup>3</sup>Potsdamer Institut für Klimafolgenforschung, D-14412 Potsdam, Germany

Wir untersuchen mit Hilfe einer Hierarchie von Analysemethoden, welche Trends systematisch eliminieren können, Langzeitkorrelationen in Temperatur- und Niederschlagszeitreihen von mehr als hundert meteorologischen Stationen, die weltweit verstreut liegen. Wir finden, daß im Gegensatz zu Temperaturreihen die vom Jahresgang bereinigten Niederschlagsreihen kein universelles Korrelationsverhalten zeigen. Die meisten Reihen sind bereits auf mittleren Zeitskalen von einem Monat unkorreliert. Bei Temperaturreihen finden wir erhebliche Unterschiede zwischen Inseln und Festlandstationen. Niederschlagsreihen zeigen stärkeres multifraktales Verhalten als Temperaturreihen.

Allgemein ist eine **Zeitreihe** der Länge  $L$  von der Form:

$$x_i = z_i + m_i + s_i, \quad i = 1, \dots, L$$

$s_i = s_{i+NT}$  = Saisonkomponente  
 $m_i$  = Trendkomponente  
 $z_i$  = stochastische Komponente (Fluktuationen)

Korrelationen zwischen Fluktuationen  $z_i$  zweier Werte im Abstand  $s$  einer Zeitreihe werden durch die **(Auto)Korrelationsfunktion**

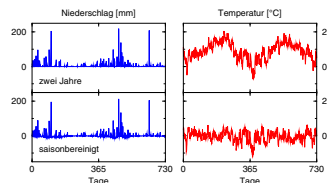
$$C(s) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L-s} z_i z_{i+s}$$

bestimmt. Im Falle langreichweitiger Korrelationen fällt  $C(s)$  potenziell ab:

$$C(s) \sim s^{-H}, \quad 0 < H < 1$$

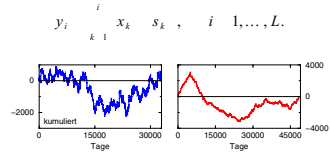
Nichtstationaritäten wie Trends und die endliche Länge der Zeitreihe machen es unmöglich, das asymptotische Verhalten von  $C(s)$  und den **Korrelations-exponenten** zu bestimmen [2].

Um das Korrelationsverhalten der Fluktuationen zu untersuchen, muß die Reihe von Trends und Saison bereinigt werden. Die Saisonkomponente  $s_i$  wird in unseren klimatischen Zeitreihen ermittelt, indem für jeden der 365 Kalendertage ein mittlerer Wert von  $x_i$  bestimmt wird. Jahreszeitlich bedingte Unregelmäßigkeiten wie ausgeprägte Regen- und Trockenzeiten werden nicht vollständig eliminiert.



## Trendbereinigende Fluktuationsanalyse ("Detrended Fluctuation Analysis", DFA)

1. Bildung des Profils der saisonbereinigten Reihe:

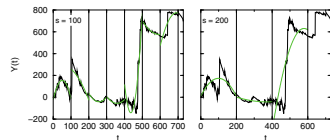


2. Unterteilung des Profils in  $N = L / s$  nicht-überlappende Fenster der Breite  $s$ , von beiden Enden aus startend. Man erhält  $2N$  Fenster.

3. Mit polynomialer Approximation vom Grad  $n$  wird für jedes Fenster  $i = 1, \dots, 2N$  eine mittlere Varianz bestimmt:

$$F_n^2(s, i) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s Y_{(i-1)s+j} - P_n(i)^2$$

Dadurch wird das Profil von polynomialen Trends bis zur Ordnung  $n$  lokal bereinigt [3].



Den Approximationsgrad  $n$  findet man in den Bezeichnungen: **DFA0, DFA1, ...** allgemein **DFA $n$** .

Trends, die keiner Periode oder angenähertem polynomialen Verlauf gehorchen, lassen sich durch diese Methoden nicht vollständig eliminieren. Da wir in klimatischen Zeitreihen nur mit äußerst schwachen Trends konfrontiert werden, lassen sich diese jedoch sehr gut polynomial approximieren.

4.A) **DFA $n$** : Bildung des arithmetischen Mittels über die Fluktuationsquadrate aller Fenster der Breite  $s$

$$F_n(s) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} F_n^2(s, i)^{1/2}$$

und variieren der Breite  $s$  bis zu einem  $s_{max} < \frac{1}{4}L$ . Falls

$$F_n(s) \sim s^H,$$

dann gilt für den Zusammenhang zwischen **Skalenexponent  $H$**  und **Korrelations-exponent**:

$$H = 1 - \frac{1}{2}.$$

4.B) **MULTIFRAKTALANALYSE (MF-DFA)**: Bildung der  $q$ -ten Momente, welche für betragsgroße  $q$ -Werte je nach Vorzeichen kleine oder große Fluktuationen stärker wichten [4].

$$F_n(q, s) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} F_n^2(s, i)^{|q|/2}$$

und variieren der Fensterbreite  $s$  bis  $s_{max}$  sowie der  $q$ -Werte. Falls

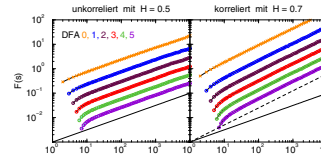
$$F_n(q, s) \sim s^{h(q)}$$

mit  $h(q) = H$  für  $q \rightarrow 2$ , so ist die Sequenz der  $x_i$ -Werte ein **Multifraktal**.

5. Bestimmen der **Skalenexponenten  $H$**  bzw.  $h(q)$  als Steigung der Fluktuationen  $F_n(s)$  der **DFA $n$**  bzw.  $F_n(q, s)$  der **MF-DFA $n$**  in einem log-log-Plot gegen die Breiten  $s$ .

### Beispiele künstlicher Daten:

A) Unkorrelierte und korrelierte Zufallszahlen mit **DFA**:

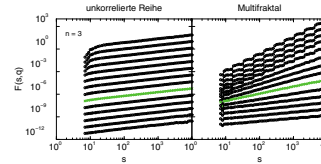


B) Unkorrelierte Zufallszahlen und binomiale multifraktale Reihe nach der Vorschrift

$$x_i = a^{n(i-1)} (1-a)^{n(i-1)}$$

wobei  $0.5 < a < 1$  und  $i = 1, \dots, L$  mit  $L = 2^{n_{max}}$  als Länge der Reihe und  $n(i)$  als Anzahl der 1er in der Binärdarstellung des Index  $i$ .

$q$ -Werte: -20, -10, -6, -4, -2, -0.2, +0.2, +2, +4, +6, +10, +20



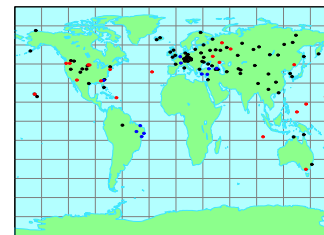
Zwischen  $h(q)$  und dem klassischen **Multifraktal-Skalenexponenten ( $q$ )** der Standard-Multifraktalanalyse besteht folgender Zusammenhang:

$$h(q) = \frac{1}{q} \ln \frac{h(q)}{h(1)}$$

[Weitere Aussagen zu **Hölder-Exponent** und **Singularitätsspektrum**: siehe Poster von Stephan Zschiegner.]

Als Maß für die Ausprägung der Multifraktalität definieren wir eine Größe  $M$  durch

$$M = 2 \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{h(q)}{h(1)}$$

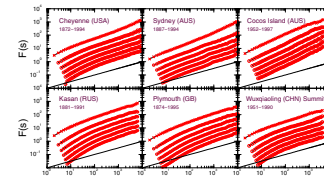


## Analyse klimatischer Zeitreihen

Wir untersuchen Temperatur- und Niederschlagsreihen von weltweit **über 100 Stationen** auf Langzeitkorrelationen und Multifraktalität mit **DFA** und **MF-DFA**.

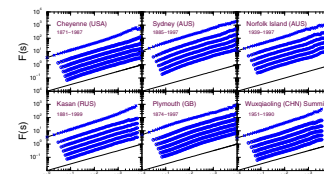
### A) Langzeitkorrelationen:

#### Temperaturreihen:



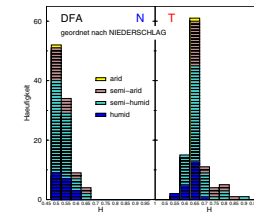
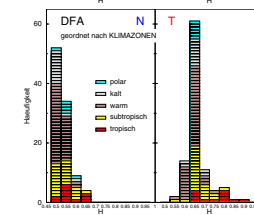
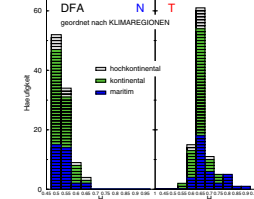
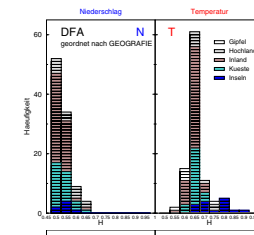
Während man bei kontinentalen und küstennahen Stationen einen Skalenexponenten  $H$  von etwa 0.65 findet, zeigen kleine Inseln einen deutlich höheren (ca. 0.80) und Gipfelstationen einen niedrigeren (ca. 0.58) Wert. In jedem Fall findet man also Langzeitkorrelationen in den Temperaturen.

#### Niederschlagsreihen:



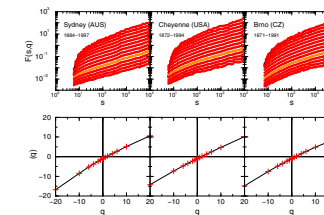
Man findet in Niederschlagsreihen keine ausgeprägten Langzeitkorrelationen. Alle Werte der Skalenexponenten  $H$  liegen um ca. 0.50 - 0.57. Bisweilen treten ausgeprägte Kurzzeitkorrelationen auf.

Mit klimatischen und geografischen Einteilungen kommt man zu folgenden Histogrammen:



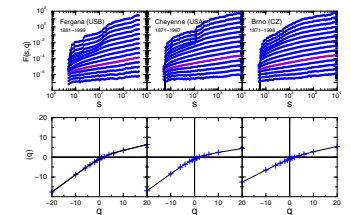
### B) Multifraktalität:

#### Temperaturreihen:



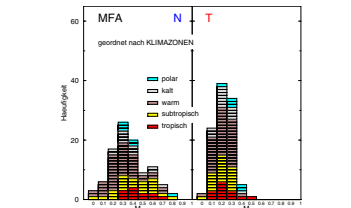
Die **MF-DFA** liefert bei Temperaturreihen nur leicht unterschiedliche Exponenten  $h(q)$ . Im  $(q)$ -Bild ergibt dies nur einen schwachen Knick, also kaum Multifraktalität.

### Niederschlagsreihen:



Niederschläge zeigen im  $(q)$ -Bild einen deutlichen Knick, der auf ausgeprägte Multifraktalität hindeutet.

Die Histogramme zur Größe  $M$  sind mit  $q$ -Werten von  $\pm 10$  bei Niederschlägen, bzw  $\pm 20$  bei Temperaturen erstellt worden.



Bei tropischen und subtropischen Bedingungen ist die Multifraktalität bei Niederschlägen oft stärker ausgeprägt.

## Resümee

### Temperaturen:

- "universelle" Langzeitkorrelationen mit einem Skalenexponenten von  $H$  etwa 0.65
- Ausnahmen: Inseln haben höhere, Berggipfel niedrigere Skalenexponenten  $H$
- kaum Multifraktalität

### Niederschläge:

- meist keine universellen Langzeitkorrelationen
- häufig ausgeprägte Multifraktalität, besonders bei tropischen und subtropischen Regionen

### Referenzen:

[1] C.K. Pang, S.V. Buldyrev, S. Havin, M. Simons, H.E. Stanley, A.L. Goldberger, Phys. Rev. E **49**, 1895 (1994).  
 [2] E. Koscielny-Bunde, A. Bunde, S. Havin, H. E. Roman, Y. Goltsev, H. J. Schellnhuber, Phys. Rev. Lett. **81**, 750 (1998).  
 [3] J.W. Kantzhard, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Havin, A. Bunde, Physica A **295**, 441-454 (2001).  
 [4] J.W. Kantzhard, S.A. Zschiegner, E.K. Koscielny-Bunde, A. Bunde, S. Havin and H.E. Stanley, arXiv:physics/0202070v1 (27 Feb 2002).  
 Wir danken unsern für finanzielle Unterstützung bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft.